



MINISTERUL
EDUCAȚIEI



Barem de notare și evaluare

Olimpiada Națională de Matematică

Etapă Locală, Județul Dolj, 17 februarie 2024

Clasa a VI-a

Subiectul 1.	
a) $a = 1 + 5 + 5^2 + 5^3 = 156 = 2^2 \cdot 3 \cdot 13$	1p
$2024 = 2^3 \cdot 11 \cdot 23$	1p
c.m.m.d.c. (a, 2024) = 4	1p
b) $b = 5^{3^n} (1 + 5 + 5^2 + 5^3) = 5^{3^n} \cdot 156 = 5^{3^n} \cdot 2^2 \cdot 3 \cdot 13$	2p
$(3^n + 1)(2 + 1)(1 + 1)(1 + 1) = 120$	1p
Deci $3^n + 1 = 10$, de unde $n = 2$.	1p
TOTAL	7p
Subiectul 2	
a) Din $\frac{x^2 + xy}{y} = \frac{y^2 + xy}{x} \Rightarrow \frac{x(x+y)}{y} = \frac{y(y+x)}{x}$.	1p
Atunci $\frac{x}{y} = \frac{y}{x} \Rightarrow \frac{x}{x+y} = \frac{y}{x+y}$, de unde $x = y$.	1p
b) Dacă $y = 0$ sau $z = 0$, atunci obținem o contradicție.	1p
Dacă $y \neq 0$ și $z \neq 0$, atunci $\frac{x^2 + xy + xz}{y+z} = \frac{y^2 + xy + yz}{x+z} = \frac{z^2 + xz + yz}{x+y}$.	1p
Din $\frac{x(x+y+z)}{y+z} = \frac{y(x+y+z)}{x+z} = \frac{z(x+y+z)}{x+y}$, obținem $\frac{x}{y+z} = \frac{y}{x+z} = \frac{z}{x+y}$.	
Atunci $\frac{x}{x+y+z} = \frac{y}{x+y+z} = \frac{z}{x+y+z}$, de unde $x = y = z$.	1p
Cum $xyz = x^3$ este un cub perfect de trei cifre și x cifră nenulă, rezultă că $x \in \{5, 6, 7, 8, 9\}$.	1p
Obținem $\overline{xyz} \in \{555, 666, 777, 888, 999\}$.	1p
TOTAL	7p



MINISTERUL
EDUCAȚIEI



Subiectul 3	
<p>a) $A = \{1,2,3,4, \dots, 2024\}$</p> <p>Considerăm $M = \{x \in A \mid x : 20\}$ și $P = \{x \in A \mid x : 24\}$. Atunci $B = M \cup P$.</p> <p>$M \cap P = \{x \in A \mid x : 20 \text{ și } x : 24\} = \{x \in A \mid x : [20,24]\} = \{x \in A \mid x : 120\}$</p> <p>$\text{card } M = 101$, $\text{card } P = 84$ și $\text{card } (M \cap P) = 16$</p> <p>$\text{card } B = \text{card } (M \cup P) = \text{card } M + \text{card } P - \text{card } (M \cap P) = 169$</p>	<p>1p</p> <p>1p</p> <p>1p</p> <p>1p</p>
<p>b) $2024 = 1 \cdot 2024 = 2 \cdot 1012 = 4 \cdot 506 = 8 \cdot 253 = 11 \cdot 184 = 22 \cdot 92 = 23 \cdot 88 = 44 \cdot 46$, în total opt perechi de numere din mulțimea A cu produsul 2024.</p> <p>Fixăm perechea (1,2024) și observăm că există 7 mulțimi $C = \{1, 2024, c, d\}$.</p> <p>Continuând procedeul avem $7+6+5+\dots+2+1=28$ submulțimi C ale lui A.</p>	<p>1p</p> <p>1p</p> <p>1p</p>
TOTAL	7p
Subiectul 4	
<p>Deoarece $\angle AOB$ și $\angle BOC$ sunt adiacente, cu $\angle AOB + \angle BOC < 180^\circ$, rezultă că $\angle AOC = \angle AOB + \angle BOC < 180^\circ$. Obținem $\angle POB = (180^\circ - \angle AOC) : 4 > 0$.</p> <p>Cum $[OM]$ și $[ON]$ sunt bisectoarele unghiurilor $\angle AOB$, respectiv $\angle BOC$, de unde $\angle MON = \frac{\angle AOB + \angle BOC}{2}$.</p> <p>Avem două cazuri:</p> <p>i) Dacă $(OP \subset \text{Int } (\angle BOM))$, atunci</p> $\angle POB = \angle BOM - \angle POM = \frac{\angle AOB}{2} - \frac{\angle MON}{2} = \frac{\angle AOB}{4} - \frac{\angle BOC}{4}.$ <p>Rezultă că $180^\circ - \angle AOC = 4 \cdot \angle POB = \angle AOB - \angle BOC$, de unde $\angle AOB = 90^\circ$, deci $\angle AOB$ este drept.</p> <p>ii) Dacă $(OP \subset \text{Int } (\angle BON))$, atunci</p> $\angle POB = \angle BON - \angle PON = \frac{\angle BOC}{2} - \frac{\angle MON}{2} = \frac{\angle BOC}{4} - \frac{\angle AOB}{4}.$ <p>Rezultă că $180^\circ - \angle AOC = 4 \cdot \angle POB = \angle BOC - \angle AOB$, de unde $\angle BOC = 90^\circ$, deci $\angle BOC$ este drept.</p>	<p>1p</p> <p>1p</p> <p>2p</p> <p>1p</p> <p>1p</p> <p>1p</p>
TOTAL	7p